دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

چهارشنبه
۱۴۰۳/۱۲/۲۹

بانک سؤالات کنکور:
جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی
(فصل ۵ دهم/فصل ۲ و ۳ یازدهم / فصل ۱ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
حسابان

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
حسابان	۳۸	۱	۳۸	۶۷ دقیقه

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع+توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
				-	

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

سؤالات کنکور: فصل ۵ دهم

۱- ضابطه تابع قطعه‌ای f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}۷-۳x & |x|>۱\\ -۲x & |x|<۱\end{cases}$ است. اگر $f(۱+a^۲)=f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۰۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۷-۳x & |x|>۱\\ -۲x & |x|<۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۷-۳x & ; \quad x>۱\cup x<-۱\\ -۲x & ; \quad -۱<x<۱\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که $a^۲\geq ۰$ است، پس:

$$\begin{cases}a^۲+۱\geq ۱\\ -۱<\frac{-a^۲}{۱+a^۲}<۰\end{cases}$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $f(۱+a^۲)$، از ضابطهٔ بالایی تابع f و برای محاسبهٔ $f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$، از ضابطهٔ پایینی تابع f استفاده می‌کنیم.

البته برای اینکه بتوانیم عبارت‌های $f(○)$ را ساده‌تر تعیین علامت کنیم، می‌توانستیم فرض کنیم که $a^۲=۱$ باشد در این صورت:

$$\begin{cases}f(۱+a^۲)=f(۲)\xrightarrow{۲>۱}\text{استفاده از ضابطه بالایی}\\ f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})=f(-\frac{۱}{۲})\xrightarrow{-۱<-\frac{۱}{۲}<۰}\text{استفاده از ضابطه پایینی}\end{cases}$$

می‌دانیم که $f(۱+a^۲)=f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$ است، پس:

$$۷-۳(۱+a^۲)=-۲(-\frac{a^۲}{۱+a^۲})\Rightarrow ۷-۳-۳a^۲=\frac{۲a^۲}{۱+a^۲}$$

$$\Rightarrow ۴-۳a^۲=\frac{۲a^۲}{۱+a^۲}\xrightarrow[a^۲=t]{\text{فرض}}۴-۳t=\frac{۲t}{۱+t}\Rightarrow ۴-۳t+۴t-۳t^۲=۲t$$

$$\Rightarrow ۳t^۲+t-۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}t=۱\\ t=-\frac{۴}{۳}\end{cases}\xrightarrow{t=a^۲}\begin{cases}a^۲=۱\Rightarrow a=\pm ۱\\ a^۲=-\frac{۴}{۳}\xrightarrow{a^۲>۰}\text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین اختلاف مقادیر a برابر است با: $|(-۱)-۱|=۲$ و در نتیجه گزینهٔ ۲ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۲ یازدهم

۲- نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۲,۵)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۲,۶)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

تغییرات گفته شده را به ترتیب اعمال می‌کنیم:

$$y=-x^۲+۲x+۵\xrightarrow[x\to(x-۳)]{\text{۳ واحد به طرف x های مثبت}}y=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵\xrightarrow[-۲]{\text{۲ واحد به طرف y های منفی}}y=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵-۲$$

$$\Rightarrow y=-x^۲+۶x-۹+۲x-۶+۳\Rightarrow y=-x^۲+۸x-۱۲$$

حال برای اینکه بفهمیم در کدام بازه نمودار حاصل بالای نیمساز ربع اول یعنی $y=x\,(x>۰)$ است، باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-x^۲+۸x-۱۲>x\Rightarrow -x^۲+۷x-۱۲>۰\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰\Rightarrow (x-۳)(x-۴)<۰\Rightarrow ۳<x<۴$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$، کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

ابتدا با عوض کردن جای مولفه‌های x و y در تابع f، تابع $f^{-۱}$ را می‌سازیم:

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

سپس به کمک توابع $f^{-۱}$ و g، تابع $gof^{-۱}$ را نیز به صورت مقابل تشکیل می‌دهیم:

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$
$$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$$
$$gof^{-۱}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

حال با توجه به دامنهٔ مشترک توابع g و $gof^{-۱}$ داریم:

$$\frac{g}{gof^{-۱}}=\{(۴,۲),(۵,۲)\}$$

گروه آموزشی ماز

۴- نمودار تابع $y=x^۲-x-۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

۱) $(-۵,۲)$ ۲) $(-۵,۳)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۲,۵)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

$$y=x^۲-x-۳\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد به طرف x های منفی}}y=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳\xrightarrow[-۹]{\text{۹ واحد به طرف y های منفی}}y=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳-۹$$
$$\Rightarrow y=x^۲+۳x-۱۰\xrightarrow[y<۰]{\text{نمودار زیر محور x ها}}x^۲+۳x-۱۰<۰\Rightarrow(x+۵)(x-۲)<۰\Rightarrow-۵<x<۲$$

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of)-f$، کدام است؟

۱) $\{-۱,۴\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۲,-۱\}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

ابتدا با جابه‌جایی عناصر زوج مرتب‌ها در تابع g، تابع وارون آن $(g^{-۱})$ را به دست می‌آوریم:

$$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

حال تابع $g^{-۱}of$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g^{-۱}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

در نهایت با توجه به دامنه مشترک $g^{-۱}of$ و f، داریم:

$$(g^{-۱}of)-f=\{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\}=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

بنابراین برد تابع مورد نظر مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است.

گروه آموزشی ماز

۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر k، بازهٔ $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ است؟

۱) $(\frac{۱}{۳},۳]$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۳})$ ۴) $[-۱,-\frac{۱}{۳})$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

ابتدا دامنه تابع f را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}9-x^2\geq 0\Rightarrow -3\leq x\leq 3\\ x-1\neq 0\ \Rightarrow x\neq 1\end{cases}\Rightarrow D_f=[-3,1)\cup(1,3]$$

اگر بخواهیم بازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنه تابع باشد، باید:

$$\xrightarrow{x\in[-3,1)}\begin{cases}k-2\geq -3\\ 3k+2\leq 1\\ k-2<3k+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geq -1\\ k\leq -\frac{1}{3}\\ k>-2\end{cases}\Rightarrow k\in[-1,-\frac{1}{3}]$$

توجه ۱:

اگر $k=-\frac{1}{3}$ باشد، بازه موردنظر به صورت $(-\frac{7}{3},1)$ است که این بازه نیز زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع f است و در اصل گزینه «۴» باید به صورت $[-1,-\frac{1}{3}]$ می‌بود.

توجه ۲:

اگر بازه $(1,3]$ را نیز به صورت فوق در نظر گرفته و حل کنیم، جوابی برای k حاصل نخواهد شد.

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/ ترکیبی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

نکته ۱:

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی معکوس‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases}(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)\\ (f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)\end{cases}$$

نکته ۲:

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$$

$$(g^{-1}of^{-1})(20)=g^{-1}(f^{-1}(20))$$

حال به جای محاسبه $f^{-1}(20)$، طبق نکته ۲، معادله $f(x)=20$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=x+\sqrt{x}=20\xrightarrow{\text{x باید مربع کامل باشد}}x=16$$

بنابراین $f^{-1}(20)=16$ است، حال:

$$g^{-1}(f^{-1}(20))=g^{-1}(16)$$

و به جای محاسبه $g^{-1}(16)$، معادله $g(x)=16$ را حل می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{9x+6}{1-x}=16\Rightarrow 9x+6=16-16x\ \Rightarrow\ x=\frac{2}{5}$$

بنابراین حاصل $g^{-1}(f^{-1}(20))$، برابر $\frac{2}{5}$ است.

گروه آموزشی ماز

۸- با فرض $f(x)=x^2-4x+9;x\geq 2$ و $g(x)=\frac{3-x}{2}$، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-9)$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱:

$$\begin{cases}(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)\\(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)\end{cases}$$

نکته ۲:

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$$

می‌دانیم $(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$ است. پس ابتدا تابع $gof(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{3-(x^2-4x+9)}{2}=\frac{-x^2+4x-6}{2}$$

حال باید $(gof)^{-1}(-9)$ را بیابیم. بنابراین طبق نکته ۲، به جای محاسبهٔ $(gof)^{-1}(-9)$، معادله $gof(x)=-9$ را حل می‌کنیم. یعنی:

$$(gof)^{-1}(-9)=a\Leftrightarrow gof(a)=-9$$

$$\Rightarrow\frac{-a^2+4a-6}{2}=-9\Rightarrow -a^2+4a-6=-18\Rightarrow -a^2+4a+12=0$$

$$\Rightarrow a^2-4a-12=0\Rightarrow (a-6)(a+2)=0\begin{cases}a=x=6\ \checkmark\\a=x=-2\ \times\end{cases}$$

توجه:

مطابق فرض سوال، می‌دانیم که $x\geq 2$ است، بنابراین $x=6$ قابل قبول است.

گروه آموزشی ماز

۹- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\leq x\leq 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$، ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

ابتدا ضابطهٔ توابع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

۱) $gof(x)$:

$$gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}1-(-1)^2 & ;x<-1\\ 1-x^2 & ;-1\leq x\leq 1\\ 1-(1)^2 & ;x>1\end{cases}\Rightarrow (gof)(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\leq x\leq 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

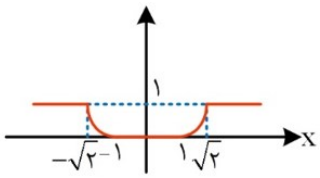
۲) $fog(x)$:

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\begin{cases}-1 & ;1-x^2<-1\\ 1-x^2 & ;-1\leq 1-x^2\leq 1\\ 1 & ;1-x^2>1\end{cases}\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\\ 1 & \varnothing\end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

برای به دست آوردن ضابطه تابع $(gof)(x)-(fog)(x)$، با توجه به دامنه مشترک هر دو تابع داریم:

$$(gof)(x)-(fog)(x)=\begin{cases}0-(-1)=1 & ; x>\sqrt{2}\\ 0-(1-x^2)=x^2-1 & ; 1<x\le\sqrt{2}\\ (1-x^2)-(1-x^2)=0 & ; -1\le x\le 1\\ 0-(1-x^2)=x^2-1 & ; -\sqrt{2}\le x<-1\\ 0-(-1)=1 & ; x<-\sqrt{2}\end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع، بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۱۰- تابع $f(x)=x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\sqrt{x^3}, x\le 0$ ۲) $-\sqrt[3]{x}, x\le 0$ ۳) $-\sqrt{x^3}, x\ge 0$ ۴) $-\sqrt[3]{x}, x\ge 0$

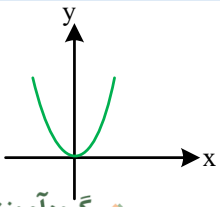
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

برای به‌دست آوردن ضابطه وارون تابع، ابتدا x را تنها می‌کنیم و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم.

$f(x)=x^2|x|\to(-\infty,0]\to$ نزولی

$x\le 0\to y=-x^3 \xrightarrow{\text{وارون}} y=-\sqrt[3]{x} \quad x\ge 0$



گروه آموزشی ماز

۱۱- تابع با ضابطه $y=\sqrt{(x+1)^2}-|3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}x-7, x\ge 2$ ۲) $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, x\le 3$

۳) $-2x+14, x\le 3$ ۴) $-2x-\frac{14}{3}, x\ge 2$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

:

$$\sqrt{f^2(x)}=|f(x)|$$

$$y=\sqrt{(x+1)^2}-|3x-6|=|x+1|-|3x-6|$$

$$y=\begin{cases}2x-7 & x<-1\\ 4x-5 & -1\le x<2\\ -2x+7 & x\ge 2\end{cases}\longrightarrow \text{نزولی}$$

$$y=-2x+7\ ;\ x\ge 2\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\ ;\ x\le 3$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر تابع $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، معکوس خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حال با توجه به نکته فوق داریم:

$$x^۳+۳x-۱۲=x \Rightarrow x^۳+۲x-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (x^۳-۸)+(۲x-۴)=۰ \Rightarrow (x-۲)(x^۲+۲x+۴)+۲(x-۲)=۰ \Rightarrow (x-۲)\underbrace{(x^۲+۲x+۶)}_{\Delta<۰}=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow A(۲,۲)$$

$$OA=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنه محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

۱) نمودارهای $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند.

۲) اگر $\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در $f(x)$ باشد، آن‌گاه $\begin{vmatrix}b\\a\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در $f^{-۱}(x)$ خواهد بود.

وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$، خط $g(x)=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. پس:

$$۱۲-x=۱۰ \Rightarrow x=۲$$

یعنی نقطه تقاطع $f^{-۱}$ و g، به صورت $(۲,۱۰)$ است، پس:

$$f^{-۱}(۲)=۱۰ \Rightarrow f(۱۰)=۲$$

$$\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}}=۲ \Rightarrow ۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}=۴ \Rightarrow ۲\sqrt{۱۰m-۱}=۶$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰m-۱}=۳ \Rightarrow ۱۰m-۱=۹ \Rightarrow ۱۰m=۱۰ \Rightarrow m=۱$$

حال باید مقدار $f(m+۴)$ را پیدا کنیم:

$$f(m+۴) \xrightarrow{m=۱} f(۵)=?$$

$$f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}} \xrightarrow[m=۱]{x=۵} f(۵)=\sqrt{۵-۲\sqrt{۵-۱}}=۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}$ در چند نقطه، تابع وارون خود را قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

تابع معکوس پر حاشیه!

اگر تابع $f(x)$ معکوس‌پذیر (یک به یک) باشد، دامنهٔ تابع f با برد تابع $f^{-۱}$ و برد تابع f با دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر است.

$$D_f=R_{f^{-۱}}$$

$$R_f=D_{f^{-۱}}$$

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع معکوس

برای محاسبهٔ ضابطهٔ معکوس تابع یک‌به‌یک f، کافی است در تابع $f(x)$ به جای $f(x)$، y قرار دهیم و تابع را به گونه‌ای مرتب کنیم که x در یک طرف تساوی تنها شود و سایر عبارت‌ها برحسب y در طرف دیگر تساوی قرار بگیرند و در آخر تغییرات را به‌صورت زیر اعمال می‌کنیم:

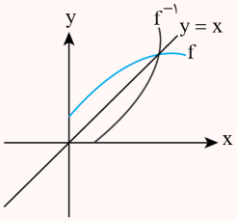
$$x \to f^{-۱}(x)$$

$$y \to x$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

نقطهٔ برخورد f و f^{-1}

برای محاسبهٔ نقطهٔ برخورد f و f^{-1} کافی است معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کنیم. اگر تابع $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، برای محاسبهٔ نقطهٔ برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم زیرا نمودار f و f^{-1} روی خط $y=x$ برخورد دارند.



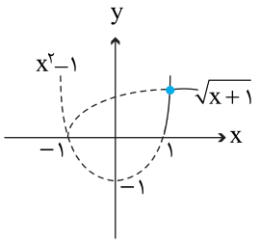
ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}1+x\geq 0\Rightarrow x\geq -1\\ 1+\sqrt{1+x}\geq 0\Rightarrow \text{همواره برقرار}\end{cases}\Rightarrow D_f=[-1,+\infty)$$

می‌دانیم که اگر تابعی اکیداً صعودی باشد، وارون خود را فقط روی $y=x$ قطع می‌کند، پس برای پیدا کردن نقاط تلاقی f و f^{-1} کافی است که معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}1+\sqrt{1+x}=x^2\Rightarrow\sqrt{1+x}=x^2-1\quad(*)$$

چون تعداد نقاط تلاقی را می‌خواهیم، بهتر است که نمودار توابع $y=x^2-1$ و $y=\sqrt{1+x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم فقط توجه داشته باشید که $x\in[1,+\infty)$ است، چرا که $D_{f^{-1}}=R_f$ است (خب بالاخره نقطهٔ تلاقی f و f^{-1} باید توی دامنهٔ هر دو تابع حضور داشته باشه) و می‌دانیم که چون f تابعی اکیداً صعودی است، بنابراین:



$$R_f=D_{f^{-1}}=[f(-1),+\infty)=[1,+\infty)$$

همان‌طور که می‌بینید نمودار تابع $y=x^2-1$ و $y=\sqrt{1+x}$ در بازهٔ $[1,+\infty)$ تنها در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

حالا اگه یه نفر بخواد معادلهٔ (*) رو حل بکنه چی؟

$$\sqrt{1+x}=x^2-1\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}1+x=(x^2-1)^2\Rightarrow 1+x=x^4-2x^2+1$$

$$\Rightarrow x^4-2x^2-x=0\Rightarrow x(x^3-2x-1)=0\Rightarrow x(x+1)(x^2-x-1)=0$$

$$\xrightarrow[D_{f^{-1}}=R_f]{x\in[1,+\infty)}\begin{cases}x=0 & \times\\ x=-1 & \times\\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<1 & \times\\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1 & \checkmark\Rightarrow\text{فقط یک x پیداشد!}\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۳ یازدهم

۱۵- نمودار یک تابع به‌صورت $f(x)=-2+(\frac{1}{2})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۹۸)

ابتدا معادله هر دو تابع را با هم برابر قرار می‌دهیم و می‌دانیم که هر دو تابع در نقاطی به طول‌های $x=1$ و $x=2$ همدیگر را قطع می‌کنند. پس:

$$y=f(x)\Rightarrow x^2-x=-2+(\frac{1}{2})^{Ax+B}\Rightarrow\begin{cases}x=1:1-1=-2+(\frac{1}{2})^{A+B}\Rightarrow(\frac{1}{2})^{A+B}=2^1\Rightarrow(2^{-1})^{A+B}=2^1\Rightarrow -A-B=1\\ x=2:4-2=-2+(\frac{1}{2})^{2A+B}\Rightarrow(\frac{1}{2})^{2A+B}=4\Rightarrow(2^{-1})^{2A+B}=2^2\Rightarrow -2A-B=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-A-B=1\\-2A-B=2\end{cases}\Rightarrow A=-1\ ,\ B=0\Rightarrow f(x)=-2+(\frac{1}{2})^{-x}\xrightarrow{x=3}f(3)=-2+(\frac{1}{2})^{-3}=-2+(2^{-1})^{-3}=-2+8=6$$

گروه آموزشی ماز

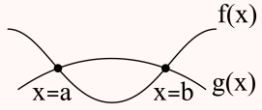
۱۶- نمودار یک تابع به‌صورت $f(x)=3^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

۱) $\frac{1}{27}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

نقطهٔ برخورد توابع

برای محاسبهٔ نقطهٔ برخورد (تلاقی) ۲ تابع $f(x)$ و $g(x)$ کافی است معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم.



$$f(x)=g(x)\Rightarrow\begin{cases}x=a\\x=b\end{cases}$$

ابتدا معادله هر دو تابع را با هم برابر قرار می‌دهیم و می‌دانیم که دو تابع در نقاط به طول $x=1$ و $x=3$ متقاطع‌اند، پس:

$$3^{Ax+B}=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=1:3^{A+B}=1\\x=3:3^{3A+B}=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{A+B}=3^0\\3^{3A+B}=3^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\3A+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=3^{x-1}\xrightarrow{x=0}f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log 3=0/48)$

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

در صورت بامعنی بودن لگاریتم‌ها داریم

- $\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$
- $\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$
- $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$

عنصر مورد نظر بعد از هر دوره ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم قبلی خود را از دست می‌دهد و $\frac{9}{10}$ جرم قبلی آن باقی می‌ماند. بنابراین چون جرم اولیه عنصر ۲۴ گرم است، لذا جرم باقی مانده عنصر بعد از گذشت $30n$ روز برابر $24(\frac{9}{10})^n$ است.

حال می‌خواهیم بدانیم که پس از چند دوره ۳۰ روزه، تنها ۸ گرم از عنصر باقی می‌ماند. پس:

$$(\frac{9}{10})^n\times 24=8\Rightarrow(\frac{9}{10})^n=\frac{1}{3}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آزمـــون وی آی پی

اولین پخش آزمون ها در تلگرام

آرشیو آزمون های سال گذشته 😮

جهت دانلود آزمون ها در کانال ما با آیدی
زیر در تلگرام عضو باشید:

@AzmonVip

t.me/AzmonVip

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

از طرفین رابطه فوق در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log(\frac{۹}{۱۰})^n = \log\frac{۱}{۳} \Rightarrow n(\log ۹ - \log ۱۰) = -\log ۳ \Rightarrow n = \frac{-\log ۳}{\log ۳^۲ - ۱} \Rightarrow n = \frac{-\log ۳}{۲\log ۳ - ۱}$$

$$\xrightarrow{\log ۳ = ۰/۴۸} n = \frac{-۰/۴۸}{۲(۰/۴۸)-۱} = \frac{-۰/۴۸}{۰/۹۶-۱} = \frac{۰/۴۸}{۰/۰۴} = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲$$

بنابراین بعد از گذشت ۱۲ دوره ۳۰ روزه، به عبارت دیگر بعد از گذشت $۱۲\times ۳۰ = ۳۶۰$ روز، تنها ۸ گرم از عنصر باقی می‌ماند.

گروه آموزشی ماز

۱۸- در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به‌جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{۱}{۳}$ غلظت اولیه می‌شود؟ $(\log ۲ = ۰/۳, \log ۳ = ۰/۴۸)$

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱:

$$\begin{cases}\log ۵ = ۱ - \log ۲\\ \log ۲ = ۱ - \log ۵\end{cases}$$

نکته ۲:

در صورت نامنفی بودن لگاریتم‌ها داریم:

- $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$
- $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$
- $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$

اگر هر روز ۴ لیتر از محلول را برداریم و به جای آن آب خالص اضافه کنیم، در این صورت حجم محلول تغییری نمی‌کند. بنابراین اگر هر روز این کار را انجام بدهیم، غلظت محلول $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ روز قبل خواهد شد، حال اگر غلظت اولیه محلول را ۱۰۰ درصد در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{غلظت محلول در روز } n\text{ام} = ۱۰۰(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n$$

می‌خواهیم بدانیم که پس از چند روز غلظت محلول، $\frac{۱}{۳}$ غلظت اولیه می‌شود. پس:

$$\frac{۱}{۳}\times ۱۰۰ = ۱۰۰(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n \Rightarrow (\frac{۹۶}{۱۰۰})^n = \frac{۱}{۳}$$

از طرفین رابطه در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n = \log\frac{۱}{۳} \Rightarrow \log(\frac{۲۴}{۲۵})^n = \log\frac{۱}{۳} \Rightarrow n(\log ۲۴ - \log ۲۵) = \underbrace{\log ۱}_{۰} - \log ۳$$

$$\Rightarrow n(\log(۳\times ۲^۳) - \log ۵^۲) = -\log ۳ \Rightarrow n = \frac{-\log ۳}{\log ۳ + ۳\log ۲ - ۲\log ۵}$$

می‌دانیم که $\log ۵ = ۱ - \log ۲$ است. پس:

$$n = \frac{-\log ۳}{\log ۳ + ۳\log ۲ - ۲(۱-\log ۲)} = \frac{-۰/۴۸}{۰/۴۸ + ۳(۰/۳) - ۲\underbrace{(۱-۰/۳)}_{۰/۷}} = \frac{-۰/۴۸}{۰/۴۸ + ۰/۹ - ۱/۴}$$

$$n = \frac{-۰/۴۸}{-۰/۰۲} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- فرض کنید $\log_{\frac{۵}{۲}}(۳x-۲) = ۱$، مقدار x، کدام است؟ $\begin{vmatrix}\log ۵ & \log ۲\\ \log ۲ & \log ۵\end{vmatrix}$

۱) ۹ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکته:

ـ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A را با $|A|$ نمایش داده و داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

ـ اگر لگاریتم‌ها با معنی باشند، داریم:

- $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$
- $\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{\frac{a}{b}}$
- $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$

با توجه به نکته گفته شده داریم:

$$A=\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2=(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)$$

حال به کمک دو رابطه $\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{\frac{a}{b}}$ و $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$ داریم:

$$A=(\log\frac{5}{2})\underbrace{(\log 10)}_{1}=\log\frac{5}{2}$$

حال معادله داده شده را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}}_{A}\log_{\frac{5}{2}}^{(3x-2)}=1\Rightarrow\log\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}^{(3x-2)}=1\Rightarrow\log_{\frac{5}{2}}^{(3x-2)}=\frac{1}{\log\frac{5}{2}}$$

از طرفی مطابق رابطه $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$ داریم: (توجه: مبنای $\log\frac{5}{2}$، ۱۰ می‌باشد.)

$$\log_{\frac{5}{2}}^{(3x-2)}=\log_{\frac{5}{2}}^{10}\Rightarrow 3x-2=10\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- دامنهٔ تغییرات تابع $f(x)=\log_6\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}$، کدام است؟

۱) $(-9,9)$ ۲) $(-4,9)$ ۳) $(4,9)$ ۴) $(-4,4)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکته:

برای به دست آوردن دامنه تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شروط زیر را بررسی کنیم:

۱) $f(x)>0$

۲) $g(x)>0$

۳) $g(x)\neq 1$

پس از حل نامساوی‌های فوق بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

روش اول:

$$\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0\Rightarrow 6+\sqrt{|x|}-|x|>0\Rightarrow 6+\sqrt{|x|}-(\sqrt{|x|})^2>0\Rightarrow(\sqrt{|x|})^2-\sqrt{|x|}-6<0$$

حال اگر $\sqrt{|x|}$ را برابر t فرض کنیم باید $t^2-t-6<0$ باشد. پس:

$$t^2-t-6<0\Rightarrow\underbrace{(t+2)}_{>0}(t-3)<0\Rightarrow t-3<0\Rightarrow t<3\xrightarrow{t=\sqrt{|x|}}\sqrt{|x|}<3\Rightarrow|x|<9\Rightarrow-9<x<9$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

روش دوم:

استفاده از گزینه‌ها:

$$\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}>۰ \Rightarrow ۶+\sqrt{|x|}-|x|>۰$$

حال به کمک گزینه‌ها و عددگذاری داریم:

$$\begin{cases} x=۴ \Rightarrow ۶+\sqrt{۴}-۴=۸-۴=۴>۰ \Rightarrow & \text{باید در گزینه درست وجود داشته باشد} \quad x=۴ \Rightarrow ۴ \text{ و } ۳ \text{ رد گزینه‌های} \\ x=-۴ \Rightarrow ۶+\sqrt{|-۴|}-|-۴|=۶+۲-۴=۴>۰ \Rightarrow & \text{باید در گزینه درست وجود داشته باشد} \quad x=-۴ \Rightarrow ۲ \text{ رد گزینه} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر به ازای اعداد مثبت و مخالف یک a، b و c تساوی $\log_a c+\log_b c=۱$ برقرار باشد، آنگاه $\log_c^a . \log_c^b$ کدام است؟

۱) $\log_c(ab)$ ۲) $۲\log_c(ab)$ ۳) $\log_c(a+b)$ ۴) $۲\log_c(a+b)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

با فرض با معنی بودن لگاریتم‌ها:

- $\log_z^x+\log_z^y=\log_z^{xy}$
- $\log_y^x=\frac{۱}{\log_x^y}$

ابتدا به کمک رابطه $\log_y x=\frac{۱}{\log_x y}$ داریم:

$$\log_a c+\log_b c=۱ \Rightarrow \frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱ \Rightarrow \frac{\log_c a+\log_c b}{\log_c a.\log_c b}=۱$$

$$\Rightarrow \log_c a \times \log_c b=\log_c a+\log_c b$$

حال به کمک رابطه $\log_z x+\log_z y=\log_z xy$ داریم:

$$\log_c a.\log_c b=\log_c ab$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- فرض کنید $۵^x=۱۰$ است. اگر $۲^{f(x)}=۲۰$ باشد، ضابطه f کدام است؟

۱) $\frac{۲x+۱}{x+۱}$ ۲) $\frac{x-۱}{۲x-۱}$ ۳) $\frac{۲x-۱}{x-۱}$ ۴) $\frac{x+۱}{۲x+۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

- $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$
- $\log AB=\log A+\log B$

$$۵^x=۱۰ \to x\log ۵=۱ \to \log ۵=\frac{۱}{x} \to \log ۲=۱-\log ۵=۱-\frac{۱}{x}$$

$$۲^{f(x)}=۲۰ \to f(x)\log ۲=\log ۲۰ \to f(x)=\frac{۱+\log ۲}{\log ۲}=\frac{۱+۱-\frac{۱}{x}}{۱-\frac{۱}{x}}=\frac{۲x-۱}{x-۱}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۳- اگر $a^۲+۹b^۲=۱۰ab$ باشد، مقدار $\log(\frac{a+۳b}{۴})$، واسطه حسابی کدام دو جمله زیر است؟

۱) $\log a, \log ۳b$
۲) $\log a, \log b$
۳) $\log \sqrt{a}, \log \sqrt{b}$
۴) $\log \sqrt{a}, \log \sqrt{۳b}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر b واسطه حسابی a و c باشد: $۲b=a+c$

ویژگی لگاریتم

۱) $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$

۲) $\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$

$$a^۲+۹b^۲=۱۰ab \xrightarrow{+۶ab} a^۲+۹b^۲+۶ab=۱۶ab \Rightarrow (a+۳b)^۲=۱۶ab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+۳b}{۴}\right)^۲=ab \xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای ۱۰}} \log\left(\frac{a+۳b}{۴}\right)^۲=\log ab$$

$$\Rightarrow ۲\log\frac{a+۳b}{۴}=\log a+\log b$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ $(\log_۳^۵=۱/۴ \text{ و } \log_۵^۳=۲/۴)$

۱) ۳۸۰
۲) ۳۶۰
۳) ۴۴۰
۴) ۴۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته ۱:

اگر در هر a ساعت، یک عنصر رادیواکتیو $\frac{p}{q}$ از جرم خود را از دست بدهد، تابع مقدار جرم آن برحسب ساعت از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$m(t)=A(۱-\frac{p}{q})^{\frac{t}{a}}$$

A: جرم اولیه

تبصره: به جای ساعت، می‌توان دقیقه، سال، قرن و یا هر واحد زمان دیگری قرار داد.

نکته ۲:

اگر a، b، c اعدادی مثبت بوده و $c \neq ۱$، آن‌گاه روابط زیر را داریم:

۱) $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$
۲) $\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{\frac{a}{b}}$
۳) $\log_{c^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_c^a$
۴) $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$
۵) $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$
۶) $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b} \quad (a,b \neq ۱)$

عنصر مورد نظر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقی‌مانده خود را از دست می‌دهد، پس:

$T=۱$

$$m(t)=A(\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{T}}$$

حال برای اینکه بدانیم این عنصر پس از چند دقیقه، $\frac{۱}{۶}$ از جرمش باقی می‌ماند، داریم:

$$\frac{۱}{۶}A=A(\frac{۸}{۹})^t \Rightarrow (\frac{۸}{۹})^t=\frac{۱}{۶}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

از طرفین رابطه فوق در مبنای ۵، لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{۵}^{(\frac{۸}{۹})^t} = \log_{۵}^{\frac{۱}{۶}} \Rightarrow t\log_{۵}^{\frac{۸}{۹}} = \log_{۵}^{\frac{۱}{۶}}$$

$$t(\log_{۵}^{۸} - \log_{۵}^{۹}) = \log_{۵}^{۱} - \log_{۵}^{۶} \Rightarrow t(\log_{۵}^{۲^۳} - \log_{۵}^{۳^۲}) = -\log_{۵}^{۶}$$

$$t(\frac{۳}{\log_{۲}^{۵}} - \frac{۲}{\log_{۳}^{۵}}) = -(\frac{۱}{\log_{۲}^{۵}} + \frac{۱}{\log_{۳}^{۵}})$$

$$t(\frac{۳}{۲/۴} - \frac{۲}{۱/۴}) = -(\frac{۱}{۲/۴} + \frac{۱}{۱/۴}) \Rightarrow t(\frac{۵}{۴} - \frac{۱۰}{۷}) = -(\frac{۵}{۱۲} + \frac{۵}{۷})$$

$$t(-\frac{۵}{۲۸}) = -(\frac{۹۵}{۸۴}) \Rightarrow t = \frac{\frac{۹۵}{۸۴}}{\frac{۵}{۲۸}} = \frac{۲۸\times۹۵}{۸۴\times۵} = \frac{۱۹}{۳} \Rightarrow t = \frac{۱۹}{۳}(hr)$$

یعنی در $\frac{۱۹}{۳}$ ساعت یا همان ۳۸۰ دقیقه $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی می‌ماند:

$$t = \frac{۱۹}{۳}\times۶۰ = ۳۸۰(min)$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $\log(۱-x)=۵+۳\log(x^۲-۲x+۱)$ باشد، مقدار $\log_{۳}(-x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

معادلات لگاریتمی

به معادله‌ای که در آن x جلوی لگاریتم قرار بگیرد، معادلهٔ لگاریتمی می‌گوییم. معادلات لگاریتمی را به ۲ نوع تقسیم می‌کنیم:

ـ در معادلهٔ نوع اول، لگاریتم با یک عدد مساوی می‌شود. $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$

ـ در معادلهٔ نوع دوم، دو عبارت لگاریتمی با مبنای یکسان، مساوی می‌شوند. $\log_b^a = \log_b^c \Rightarrow a = c$

پس از حل معادلهٔ لگاریتمی باید جواب‌ها را کنترل کنیم که در دامنه قرار داشته باشند.

روش اول:

$$\begin{cases} ۱-x>۰ \Rightarrow x<۱ \\ x^۲-۲x+۱>۰ \Rightarrow R-\{۱\} \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = (-\infty, ۱)$$

$$\log^{(x^۲-۲x+۱)} + ۳\log^{(۱-x)} = ۵ \Rightarrow \log^{(x-۱)^۲} + ۳\log^{(۱-x)} = ۵$$

به کمک رابطهٔ $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$ داریم:

$$\log^{(۱-x)^۲} + ۳\log^{(۱-x)} = ۵ \Rightarrow ۲\log^{(۱-x)} + ۳\log^{(۱-x)} = ۵$$

$$\Rightarrow ۵\log^{(۱-x)} = ۵ \Rightarrow \log^{(۱-x)} = ۱$$

سپس به کمک رابطهٔ $\log_b^a = c \Rightarrow b^c = a$ داریم:

$$(۱-x) = ۱۰ \Rightarrow x = -۹$$

در نتیجه حاصل خواسته‌شده برابر است با:

$$\log_{۳}^{(-x)} = \log_{۳}^{۹} = \log_{۳}^{۳^۲} = ۲\log_{۳}^{۳} = ۲$$

روش دوم:

$$\log^{(x^۲-۲x+۱)} + ۳\log^{(۱-x)} = ۵ \Rightarrow \log^{(x-۱)^۲} + ۳\log^{(۱-x)} = ۵$$

$$\Rightarrow \log^{(۱-x)^۲} + \log^{(۱-x)^۳} = ۵$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

می‌دانیم $\log_b^a + \log_b^c = \log_b^{ac}$ است، پس:

$$\log^{(1-x)^5} = 5 \Rightarrow 5\log^{(1-x)} = 5 \Rightarrow \log^{(1-x)} = 1$$

$$\Rightarrow \log^{(1-x)} = 1 \Rightarrow 1-x = 10 \Rightarrow x = -9$$

در نتیجه:

$$\log_3^{(-x)} = \log_3^9 = 2$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۱ دوازدهم

۲۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به‌ترتیب، ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$، کدام است؟

۱) $-x+4$ ۲) $x+3$ ۳) $2x+6$ ۴) $2x-3$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با:

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

$$R = P(-\frac{b}{a})$$

می‌دانیم که باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ و باقی‌مانده تقسیم این چندجمله‌ای بر $2x+1$، برابر ۵ است. پس:

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=8 \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow P(-\frac{1}{2})=5 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، فرض می‌کنیم که باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(2x^2-x-1)$ به صورت یک چندجمله‌ای درجه اول $(ax+b)$ است. پس مطابق قضیه تقسیم داریم:

$$P(x) = (2x^2-x-1)Q(x) + (ax+b)$$

$$P(1)=8 \Rightarrow (2-1-1)Q(1) + (a+b) = 8 \Rightarrow a+b=8$$

$$P(-\frac{1}{2})=5 \Rightarrow (2(\frac{1}{4})-(-\frac{1}{2})-1)Q(-\frac{1}{2}) + (a(-\frac{1}{2})+b) = 5 \Rightarrow -\frac{a}{2}+b=5$$

$$\begin{cases} a+b=8 \\ \frac{-a}{2}+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=2\ ,\ b=6 \Rightarrow \text{باقی‌مانده}: ax+b=2x+6$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

۱) $x=1$ ۲) $x=1/5$ ۳) $x=2$ ۴) $x=2/5$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

ابتدا تبدیلات و انتقال‌های گفته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

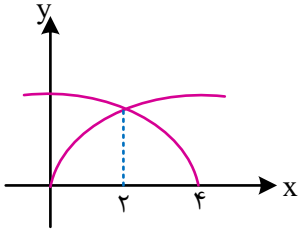
- قرینه نمودار تابع نسبت به محور yها $(x \to -x)$:

$$y=\sqrt{-x}$$

- انتقال نمودار تابع جدید به اندازه ۴ واحد به سمت راست $(x \to x-4)$:

$$y=\sqrt{-(x-4)}=\sqrt{-x+4}$$

حال نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x+4}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

توجه:

اگر معادله $\sqrt{x}=\sqrt{-x+4}$ را حل کنیم متوجه می‌شویم که طول نقطه تلاقی دو نمودار، $x=2$ است. بنابراین دو نمودار نسبت به خط $x=2$ متقارن هستند.

گروه آموزشی ماز

۲۸- به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x$، بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+2$، کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

ـ باقی‌مانده تقسیم چندجمله $p(x)$ بر $ax+b$ برابر است با:

$$ax+b=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

$$R=p(-\frac{b}{a})$$

ـ اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ بخش‌پذیر باشد، در آن صورت باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ برابر صفر است.

چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow p(\frac{1}{2})=0$$

$$p(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x\Rightarrow p(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^4+a(\frac{1}{2})^3+2(\frac{1}{2})^2-3(\frac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow 2(\frac{1}{16})+\frac{a}{8}+\frac{2}{4}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{a}{8}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}_{-1}=0\Rightarrow 1+a-8=0\Rightarrow a=7$$

حال برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ باید $p(-2)$ را به دست بیاوریم:

$$p(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x\Rightarrow p(-2)=2(-2)^4+7(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)$$

$$\Rightarrow p(-2)=(2\times 16)+7(-8)+(2\times 4)+6=32-56+8+6=-10$$

$$\Rightarrow p(-2)=-10$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) ۲، ۰ ۲) ۱، -1 ۳) ۲، -1 ۴) ۱، -2

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

تغییرات گفته شده را به ترتیب اعمال می‌کنیم از طرفی باید این مورد را به خاطر داشته باشیم که برای قرینه کردن یک نمودار نسبت به مبدأ مختصات نمودار را یک بار نسبت به محور yها و یک بار نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، پس:

$$f(x)=(x-1)^2\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}y=(-x-1)^2\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=-(-x-1)^2\Rightarrow y=-(x+1)^2$$

حال باید نمودار حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:

$$\Rightarrow y=-(x+1)^2+4$$

در این مرحله برای پیدا کردن طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با منحنی اصلی، معادله آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=(x-1)^2\\ y=-(x+1)^2+4\end{cases}\Rightarrow (x-1)^2=-(x+1)^2+4\Rightarrow x^2-\cancel{2x}+1=-x^2-\cancel{2x}+3\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به‌ترتیب $x+1$ و $\frac{1}{2}x-2$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

تابع چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)$ را به صورت $P(x)=ax^2+bx+c\ ;\ (a,b,c\in\mathbb{N})$، فرض می‌کنیم. پس:

$$P'(x)=2ax+b$$

از طرفی می‌دانیم که باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$، به ترتیب برابر -2 و $(\frac{1}{2}x+1)$ است. پس مطابق قضیه تقسیم داریم:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

$$P(x)=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2\Rightarrow P(x)=ax^2+2ax+\frac{b}{2}x+b-2$$

$$P(x)=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

حالا با تطبیق رابطه فوق با عبارت $P(x)=ax^2+bx+c$ داریم:

$$\begin{cases}2a+\frac{b}{2}=b\rightarrow\frac{b}{2}=2a\Rightarrow b=4a\\ b-2=c\xrightarrow{b=4a}c=4a-2\end{cases}$$

در رابطه $P(x)=ax^2+bx+c$، $b=4a$ و $c=4a-2$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$P(x)=ax^2+4ax+(4a-2)\Rightarrow P(x)\ \text{مجموع ضرایب}=a+4a+4a-2\Rightarrow 9a-2$$

می‌دانیم که $a\in\mathbb{N}$ است پس کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ زمانی اتفاق می‌افتد که $a=1$ باشد:

$$P(x)\ \text{کمترین مقدار مجموع ضرایب}=9(1)-2=9-2=7$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- فرض کنید برد تابع $f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}}-2^{\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}}$ به‌صورت $[a,b]$ باشد. مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{21}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2x-1}}-2^{\sqrt[3]{1-9\cos^2x}}=2^{\sqrt[3]{9\cos^2x-1}}-2^{\sqrt[3]{-(9\cos^2x-1)}}$$

$$f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2x-1}}-2^{-\sqrt[3]{9\cos^2x-1}}\xrightarrow{\sqrt[3]{9\cos^2x-1}=t}y=2^t-2^{-t}\Rightarrow y=2^t-(\frac{1}{2})^t$$

از طرفی می‌دانیم که $-1\le\cos x\le 1$ است. پس محدوده t را می‌یابیم.

$$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 0\le\cos^2x\le 1\Rightarrow 0\le 9\cos^2x\le 9\Rightarrow -1\le 9\cos^2x-1\le 8$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{-1}\le\sqrt[3]{9\cos^2x-1}\le\sqrt[3]{8}\Rightarrow -1\le t\le 2$$

می‌دانیم که $y=2^t$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی و تابع $y=(\frac{1}{2})^t$ تابعی پیوسته و اکیداً نزولی است. بنابراین می‌توان گفت که تابع $y=2^t-(\frac{1}{2})^t$، تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین با توجه به محدود t، $(-1\le t\le 2)$، برای به دست آوردن برد تابع باید مقدار تابع را در $t=-1$ و $t=2$ پیدا کنیم. پس:

$$\begin{cases}t=-1\Rightarrow y=2^{-1}-(\frac{1}{2})^{-1}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\\ t=2\Rightarrow y=2^2-(\frac{1}{2})^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}\Rightarrow b=\frac{15}{4}\end{cases}\Rightarrow b-a=\frac{15}{4}-(-\frac{3}{2})=\frac{21}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۳۲- نمودار منحنی $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست آمده با محور xها، کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) ۱ ۴) ۲

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا انتقال‌های گفته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$y=\sqrt{۴-x}$

- انتقال نمودار تابع به اندازهٔ k واحد در راستای قائم: $y=\sqrt{۴-x}+k$
- انتقال نمودار تابع به اندازه $(k-۲)$ واحد در جهت افقی: $y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k$

حال ضابطه به دست آمده را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k=\sqrt{۴-(x-k+۲)}+k=\sqrt{۴-x+k-۲}+k=\sqrt{-x+k+۲}+k$$

با توجه به گفته سوال، نمودار تابع حاصل، وارون تابع خود را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. بنابراین می‌توان گفت که نقطه $(۱,۱)$ در ضابطه تابع جدید صدق می‌کند، پس:

$$y=\sqrt{-x+k+۲}+k \xrightarrow{(۱,۱)} \sqrt{-۱+k+۲}+k=۱ \Rightarrow \sqrt{k+۱}=۱-k \quad (*)$$

$$\Rightarrow k+۱=(۱-k)^۲ \Rightarrow k+۱=۱-۲k+k^۲ \Rightarrow k^۲-۳k=۰ \Rightarrow k(k-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \checkmark \\ k=۳ \times \end{cases}$$

توجه: $k=۳$ در معادله اولیه (رابطه $(*)$) صدق نمی‌کند پس قابل قبول نیست. پس:

$$y=\sqrt{-x+k+۲}+k \xrightarrow{k=۰} y=\sqrt{۲-x}$$

حال طبق گفته سوال باید منحنی حاصل را به اندازه ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم:

$y=\sqrt{۲-x}-۱$

و برای به دست آمدن طول نقطه برخورد منحنی حاصل با محور xها، باید معادله $y=۰$ حل شود. پس:

$$y=\sqrt{۲-x}-۱ \xrightarrow{y=۰} \sqrt{۲-x}-۱=۰ \to \sqrt{۲-x}=۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲-x=۱ \to x=۱$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- فرض کنید $[a,b]$ برد تابع $f(x)=۲^{-\sqrt{۵\sin^۲(x)-۱}}$ باشد. مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

می‌دانیم که $-۱ \le \sin \bigcirc \le ۱$ است. پس:

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \sin^۲ x \le ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۰ \le ۵\sin^۲ x \le ۵$$

$$\xrightarrow{-۱} -۱ \le ۵\sin^۲ x-۱ \le ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} ۰ \le \sqrt{۵\sin^۲ x-۱} \le ۲$$

حال $\sqrt{۵\sin^۲ x-۱}$ را برابر با A کرده و داریم:

$$f(x)=۲^{-\sqrt{۵\sin^۲ x-۱}}=۲^{-A} \quad , A \in [۰,۲]$$

تابع $g(A)=۲^{-A}$ تابعی اکیداً نزولی است، بنابراین برد تابع $g(A)$، با دامنه $[۰,۲]$ برابر $[g(۲),g(۰)]$ است:

$$R_f=[g(۲),g(۰)]=[۲^{-۲},۲^{۰}]=[\frac{۱}{۴},۱] \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۱}{۴} \Rightarrow a+b=\frac{۵}{۴} \\ b=۱ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- نمودار منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به‌دست آمده، قرار دارد؟

۱) $(۱-\sqrt{۵},۰)$ ۲) $(-\sqrt{۵},۰)$ ۳) $(۰,۱-\sqrt{۵})$ ۴) $(۰,-\sqrt{۵})$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر منحنی را k واحد در راستای قائم منتقل کنیم، ضابطه آن به صورت $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}+k$ است.

از طرفی می‌دانیم که محل تلاقی توابع اکیداً صعودی با وارون خود، روی خط $y=x$ است و می‌دانیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کند، بنابراین مختصات نقطهٔ تلاقی نمودار به دست آمده با وارون خود نقطه $A(۱,۱)$ است. پس نقطهٔ A در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$۱=\sqrt{\sqrt{۱}+۳}+k \Rightarrow k=-۱ \Rightarrow y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}-۱$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اکنون انتقال‌های گفته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) قرینه نسبت به محور xها $(y \to -y)$

$$y = -\left(\sqrt{\sqrt{x}+3}-1\right) = -\sqrt{\sqrt{x}+3}+1$$

۲) انتقال به اندازه ۴ واحد به سمت چپ: $(x \to x+4)$

$$y = -\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

از بین نقاط داده شده در گزینه‌ها فقط مختصات نقطه $(0,1-\sqrt{5})$ در ضابطه تابع جدید صدق می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۳۵- چندجمله‌ای $p(x)=x^{3n+1}+2x^{3n}+x^6+3x^5+16a$، به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش‌پذیر است. برای $n=1$، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر x^2+2x-3 کدام است؟

۱) $-15x+24$ ۲) $-15x+14$ ۳) $-5x+34$ ۴) $-5x+44$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $f(a)$ می‌باشد.

$$p(-2)=0 \to (-8)^n(-2)+2(-8)^n+64-96+16a=0 \xrightarrow{n=1} a=2$$

$$p(x)=x^4+2x^3+x^6+3x^5+32=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b \Rightarrow \begin{cases} x=1 \to 39=a+b \\ x=-3 \to 59=-3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=44 \\ a=-5 \end{cases} \to R(x)=-5x+44$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)=x^2+4x+5$ برابر $x+2$ است. اگر $f(1)=13$ و $f(-1)=11$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

۱) $-x+2$ ۲) $2x-1$ ۳) $3x-2$ ۴) $-2x+3$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر فرض کنیم خارج قسمت به‌صورت $ax+b$ باشد، خواهیم داشت:

$$f(x)=(x^2+4x+5)(ax+b)+x+2$$

$$\begin{cases} f(1)=10(a+b)+3=13 \Rightarrow a+b=1 \\ f(-1)=2(-a+b)+1=11 \Rightarrow -a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=-2\ ,\ b=3$$

$$\text{خارج قسمت}=-2x+3$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2-m-5)<f(-3+2m-m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

تابع f را نزولی گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

تابع f را صعودی گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

تابع f را نزولی اکید گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f را صعودی اکید گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع f را غیریکنوا گوییم هرگاه نه صعودی خالص و نه نزولی خالص باشد. یعنی در قسمتی از دامنه صعودی و در قسمتی دیگر از دامنه نزولی باشد.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

می‌دانیم که تابع f اکیداً نزولی است، یعنی $f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha > \beta$

$$f(m^۲ - m - ۵) < f(-۳ + ۲m - m^۲) \Rightarrow m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲ \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m > ۲ \\ \text{یا} \\ m < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

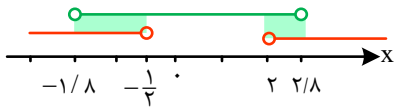
از طرفی، دامنه تابع f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، یعنی:

$$-۳ + ۲m - m^۲ < ۰ \xrightarrow[\Delta < ۰]{a < ۰} \text{همواره منفی}$$

$$m^۲ - m - ۵ < ۰ \Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \underbrace{\frac{۱ - \sqrt{۲۱}}{۲}}_{\sim -۱/۸} < m < \underbrace{\frac{۱ + \sqrt{۲۱}}{۲}}_{\sim ۲/۸}$$

پس:

$$m \in (-۱/۸, -\frac{۱}{۲}) \cup (۲, ۲/۸) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -۱$$



پس m دارای یک مقدار صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۳۸- اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $x^{۱۷} - ۵$ بر $x^۲ - x + ۱$ باشد، حاصل‌ضرب ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x \neq -۱)$

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۶ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای $B(x)$ داریم:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline \vdots & \\ R(x) & Q(x) \end{array}$$

$R(x)$: باقیمانده $Q(x)$: خارج قسمت $B(x)$: مقسوم علیه $A(x)$: مقسوم

در محاسبهٔ باقیمانده $(R(x))$ کافی است مقسوم‌علیه را مساوی با صفر قرار داده و x با بزرگ‌ترین توان را برحسب سایر جملات به‌دست آورده و در مقسوم جای‌گذاری کنیم. این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا درجهٔ عبارت باقیمانده از مقسوم‌علیه کمتر شود. عبارت به‌دست آمده همان باقیمانده است.

$$x^{۱۷} - ۵ = (x^۲ - x + ۱)Q(x) + r(x)$$

طرفین رابطهٔ فوق را $(x + ۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x^{۱۷} - ۵)(x + ۱) = \underbrace{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}_{x^۳ + ۱} Q(x) + (x + ۱)r(x)$$

$$\underbrace{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}_{x^۳ + ۱} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{غ ق ق} \quad (\text{تناقض فرض}) \\ x^۲ - x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰} x^۲ = x - ۱ \\ x^۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۳ = -۱ \end{cases}$$

$$(x^{۱۷} - ۵)(x + ۱) = (x + ۱)r(x)$$

$$\left(((x^۳)^۵ \times x^۲) - ۵\right) = r(x) \xrightarrow{x^۳ = -۱} -x^۲ - ۵ = r(x)$$

$$\Rightarrow r(x) = -(x^۲ + ۵) \xrightarrow{x^۲ = x - ۱} r(x) = -(x - ۱ + ۵) = -(x + ۴)$$

$$\Rightarrow r(x) = -x - ۴$$

بنابراین حاصل‌ضرب ضرایب $r(x)$ برابر $(-۱) \times (-۴) = ۴$ بوده و گزینهٔ ۲ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

روشی که در دورهٔ دوپینگ ۱۴۰۴ برای جمع‌بندی ۵۵ روزهٔ کنکور استفاده می‌کنید:

آغاز دوران گذار از یادگیری و شروع دوران جمع‌بندی از ۱۸ اسفندماه

از ۱۸ اسفندماه شروع دوران گذار رو آغاز می‌کنید و با تکمیل یادگیری نیمسال دوم دوازدهم، کم کم وارد دوران جمع‌بندی می‌شید.

تقسیم‌بندی مبحثی هر درس به ۶ الی ۱۰ بخش با اهمیت مشخص در کنکور

هر درس رو به صورت ۶ الی ۱۰ لقمه مبحثی برای جمع‌بندی آماده‌کردیم و در هر آزمون یکی از این لقمه‌های مبحثی رو مرور و جمع‌بندی می‌کنید.

مطالعهٔ مروری هر مبحث برای هر درس، برای شکل‌گیری اسکلت کامل اون مبحث در حافظه

هنگام مطالعهٔ مروری و مبحثی، تمام اطلاعات ترکیبی و کلی اون مبحث به شکل سیناپس‌های واحد در حافظه‌تون تثبیت میشه

شرکت در آزمون‌های مبحثی دوپینگ برای هر درس (برای هر درس ۶ الی ۱۰ آزمون مبحثی در ۳۵ روز اول)

پس از مطالعه و مرور هر درس، با شرکت در یک آزمون استاندارد از آن درس، می توانید میزان تسلط خود را بسنجید. با این روش، می‌توانید نقاط ضعف خود را شناسایی و برطرف کنید.

روز بعد: شرکت در کنکور سراسری از همون مبحث!

تمام تست‌های کنکور سراسری مربوط به هر مبحث رو به شکل یک آزمون براتون آماده کردیم، و در روز بعد از آزمون هر مبحث، با تست‌های کنکور؛ سطح تسلطتون رو double check کنید!

ایستگاه‌های جبرانی

اگر اسفند شروع نکردید، از فروردین شروع کنید و آزمون‌های قبل را بررسی کنید. اگر به آزمون‌های تألیفی نرسیدی، بررسی تست‌های کنکور سراسری را از دست نده چون تمام تست‌های کنکور جدید در دوره دوپینگ پوشش داده می‌شوند.

شبیه‌سازی شرایط عینی کنکور

در ۱۵ روز پایانی، می‌تونید ۶ بار خودتون رو در شرایط استاندارد کنکور سراسری قرار بدین؛ دو آزمون تألیفی شبیه‌ساز کنکور ماز + ۴ کنکور سراسری مهم(دی‌ماه + اردیبهشت‌ماه +کنکور تیر خارج ۱۴۰۲+کنکور تیر داخل ۱۴۰۳)!

روز کنکور؛ روزی که باید در اوج باشید!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

دغدغه‌هایی که با دورهٔ دوپینگ برطرف میشه:

داشتن برنامه منسجم برای ۵۵ روز آخر

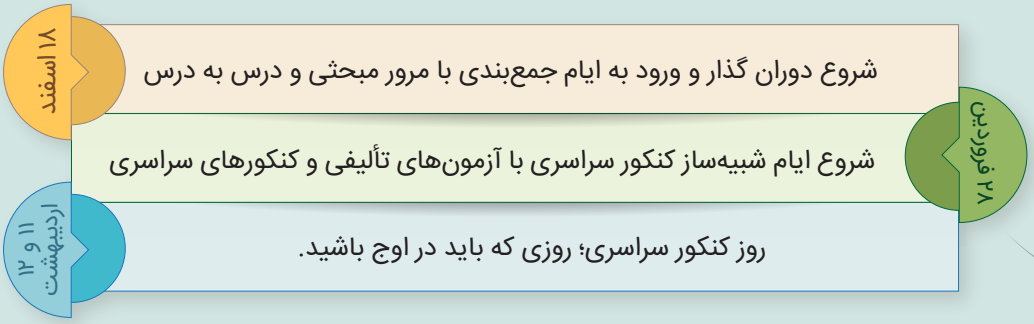
جمع‌بندی مبحثی و موضوعی دروس مختلف

تأمین تست‌های استاندارد و لازم برای دوران جمع‌بندی

تأمین مطالب و درسنامه‌های فشرده برای مرور درس‌ها در ایام جمع‌بندی

بررسی کنکورهای سراسری که دغدغهٔ اصلی دانش‌آموزان در ایام جمع‌بندی است

ایجاد شرایط شبیه‌ساز کنکور سراسری با کنکورهای اخیر و آزمون‌های شبیه ساز و پیش‌بینی کنکور



نکاتی که دربارهٔ دورهٔ دوپینگ ۱۴۰۴ باید بدونید:

⭐ در آزمون‌های مبحثی دوپینگ (آزمون‌های تألیفی و آزمون کنکورهای سراسری)، از ساعت ۸ صبح تا ۸ شب فرصت دارید تا در آزمون شرکت کنید و بلافاصله پس از اتمام آزمون هر درس، می‌تونید پاسخنامه آزمون رو دریافت کنید و صدور کارنامه هم بعد از ساعت ۸ شب انجام میشه! (هدف از این دوره عیب‌یابی هست؛ نه سنجشی ...)

⭐ در ۶ آزمون جامع دوپینگ (شامل آزمون‌های تألیفی و چهار کنکور سراسری)، همانند روال قبلی آزمون‌های ماز شما از ساعت ۷صبح تا ۵ عصر فرصت دارید تا در آزمون شرکت کنید و بعد از ساعت ۵ عصر، فایل پاسخنامه و کارنامه آزمون را دریافت می‌کنید.(هدف از این آزمون سنجشی و تخمین رتبه است.)

⭐ در تمامی آزمون‌های دوپینگ امکان دانلود و پرینت دفترچهٔ سؤالات در حین آزمون وجود دارد.

⭐ آزمون‌های ۲۱ فروردین ماز (جمع‌بندی نیمسال دوم دوازدهم) و همچین آزمون‌های جامع ۲۸ فروردین و ۴ اردیبهشت برای دوپینگی‌ها نیز فعال است. (مشترک بین ماز و دوپینگ)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds